3) $0 \le U_n \le \frac{1}{n+1}$; pour $n \ge 1$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}=0$ d'où : $\lim_{n\to+\infty} U_n=0$

EX 22 :

$x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

$f(x)=tg^3x+tgx$

1) $f'(x)=3(1+tg^2x)tg^2x+(1+tg^2x)$

$f'(x)=(1+tg^2x)(1+3tg^2x)>0$

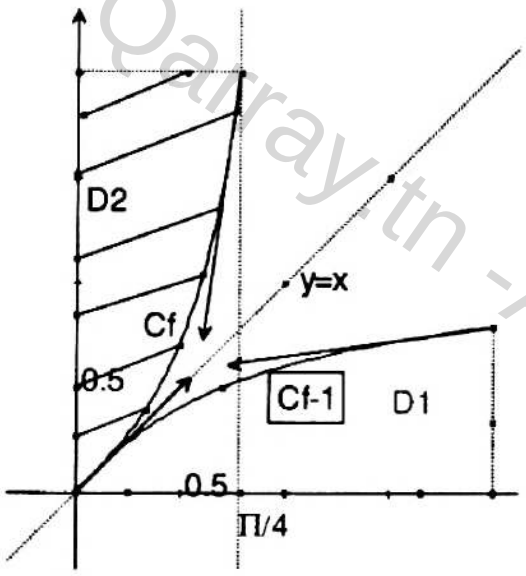
x	0		$\frac{\pi}{4}$
f'(x)	0	+	
f(x)	0	↗	2

2) f est continue et stictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

elle réalise donc une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

sur $f\left(\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right)=\left[f(0),f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=[0,2]$

3) a) $f_d'(0)=1$; $f_g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=8$



b) $* \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x).dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+tg^2x).tgx.dx=\left[\frac{1}{2}tg^2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$

$* \int_0^2 f^{-1}(x)dx$ représente l'aire de la partie du plan

limitée par $(\zeta_{f^{-1}})$ et les droites d'équations : y=0 , x=0

et x=2

$\int_0^2 f^{-1}(x)dx=\text{aire}(D_1)=\text{aire}(D_2)$ (voir figure)

d'où : $\int_0^2 f^{-1}(x)dx=2\times\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$

EX 23 :

$x \in [0,3]$

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[0,1] \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x\in\,]1,3] \end{cases}$$

1) f est continue sur chacun des intervalles $[0,1[$ et $]1$

$*f(1)=1$

$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(x)=1=f(1)$

$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x^2}=1=f(1)$

d'où f est continue en 1

par suite f est continue sur $[0,3]$

2) $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

a) pour $x \in [0,1]$

$F(x)=\int_0^x t.dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=\frac{x^2}{2}$ pour $x \in [0,1]$

pour $x \in\,]1,3]$

$F(x)=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt=\int_0^1 t.dt+\int_1^x \frac{1}{t^2}dt$

$=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{-1}{t}\right]_1^x=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}-\frac{1}{x}$

$$F(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{si } x\in[0,1] \\ \frac{3}{2}-\frac{1}{x} & \text{si } x\in\,]1,3] \end{cases}$$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn